



A LOGIKA ÉS A NYELV SZEREPE A MATEMATIKAOKTATÁS
HATÉKONYSÁGÁBAN

- Doktori értekezés -

A József Attila Tudományegyetem Bölcsészettudományi
Karára benyújtotta

Tóth Balázs

T a r t a l o m j e g y z é k

Bevezetés	1
A logika kialakulásának és fejlődésének rövid történeti áttekintése.	3
A logika mint tantárgy a tanárképző főiskolai és a középiskolai oktatásban.	11
Felmérés a főiskolára kerülő matematika szakos hallgatók logikai iskolázottságáról.	30
A logika szisztematikus oktatása utáni felmérés és eredményei.	40
Mellékletek	47
Táblázatok	56
Irodalomjegyzék	62

B e v e z e t é s

A dolgozat azzal foglalkozik, hogy a logikai ismeretek, a nyelv helyes használata hogyan befolyásolja az oktatás, szűkebben a matematikaoktatás eredményességét.

Röviden szól a logika tudományának kialakulásáról, fejlődéséről, a tudományok rendszerében elfoglalt - alkalmanként ingatag és változó - helyéről, az egyéb tudományokkal, sajátosan a matematikával kialakult kapcsolatáról.

Ismerteti a hazai gimnáziumi oktatásban korábban bevezetett logika tantárgy rövid pályafutását, tanításának eredményeit és a vele kapcsolatos nehézségeket.

Beszél az oktatás nyelvének és a segítségével oktatott matematikai elmélet nyelvének eltéréseiről, a hagyományos módszertan hiányosságairól, továbbá egy korszerűnek elfogadott módszertani elképzelésről.

Ismerteti azt a sokéves tapasztalat alapján kialakított véleményt, hogy a főiskolára kerülő hallgatók logikai előképzettsége szegényes, sőt elégtelen, hogy a középiskolában a szaktárgyak bármilyen hibátlan és alapos oktatása is nem a-

lakítja ki azokat a logikai fogalmakat, logikai műveleteket, levezetési eljárásokat, amelyek sem a matematika tanítása, sem a tanulása során nem mellőzhetők.

Ezt a véleményt alátámasztja egy[^] a matematika szakos főiskolás hallgatók körében végzett felmérés eredményeivel.

Beszámol egy másik mérésről is, amelyet a féléves logikai studium lezárása után végeztek annak megállapítására, hogy milyen eredményesen sajátítják el a hallgatók az előírt anyagot.

A két mérés alapján arra a következtetésre jut, hogy a logika oktatása és tanulása szükséges is, hasznos is, de nem szabad, hogy a logika vizsgával befejeződjék.

A logika kialakulásának és fejlődésének rövid történeti áttekintése

A logika a gondolkodás törvényeivel foglalkozó tudomány. Témakörében szerepelnek filozófiai kérdések is, más területei pedig függetlenek filozófiai meggondolásoktól. A logikának a gondolkodás lélektanon keresztül kapcsolata van a pszichológiával is. Módszereit, eredményeit minden tudományág alkalmazza. (22)

A logikus gondolkodás kialakulásának kezdete az emberré váláshoz kapcsolódik és mozzanatait ma sem ismerjük, legfeljebb a fejlődés fordulópontjait tudjuk áttekinteni.

Pontosabb ismereteink vannak a logikának mint tudományágnak a kialakulásáról és fejlődéséről. Logikai tárgyú irodalmi töredékeket már a hinduknál, a kínaiaknál és a zsidóknál találunk, mégis fejlődésének első fénykorát az ókori Görögországban élte. Zenon, Szokratész, Platon nevéhez fűződik számos logikai részterület kidolgozása, tökéletesítése. Arisztotelész fejti ki a logika alapjait és dolgozza fel szisztematikusan, ezért őt tekintjük a logika

megalkotójának. Logikáját évszázadokon keresztül semmiféle jobb, teljesebb, tökéletesebb nem multa felül. Arisztotelész főleg a kategorikus szillogizmusokkal foglalkozott, vagyis az olyan következtetésekkel, amelyeknek a premisszái is, konkluziója is kategórikus kijelentések. A következtetési sémákban szereplő tetszőleges, változtatható részeket betűkkel - fogalomváltozókkal - jelölte. Az antik Görögországban kidolgozták a kijelentések logikájának alapjait is az i.e. harmadik ill. a második században az ugynevezett sztoikus filozófiai iskola képviselői. A sztoikusok vezették be a kijelentésváltozókat. Eredményeik sajnálatos módon nem érvényesültek érdemeiknek megfelelően a logika fejlődésében, logikájuk nem vált olyan ismertté, mint Arisztotelész logikája. Ők vezették be néhány műveletet, köztük az implikációt is. (22), (24).

A középkor legnagyobb logikusa az angol skolasztikus tudós, W. Ockham volt, aki a kijelentéslogikában ért el eredményeket, felfedezéseit azonban kortársai nem értették meg, így azok feledésbe merültek. A középkori iskolai logika lényegében csak Arisztotelész logikai eredményeire épít, a legnagyobb figyelmet azonban a gondolkodás nélküli, azok fejből való recitálására fordítja. Mesterként fogásokkal, szabályok versbe való foglalásával igyekeztek elősegíteni, hogy a tanulók könnyebben megjegyezzhessék a helyes következtetési sémákat. Arisztotelész felfogását - azt, hogy a logika a helyes következtetések szabályainak belsőleg egységes rendszere - nem érvényesítik az iskolai logikában.

Az ujkor mélyreható változást hozott a természettudományok területén. Ezek alapja a megfigyelés és a kísérlet. Sok filozófus figyelme a metodológiára terelődött. Egyesek - közöttük Kant is - feltételezték, hogy a logika fejlődése befejeződött, mert századokon keresztül nem lépett előre. Ugy gondolták, hogy a logikát a tudományok rendszerében éppen a kísérleti tudományok metodológiájával kellene helyettesíteni.

Csak néhányan sejtették meg a logika további fejlődésének lehetőségét és tettek alapvető különbséget a logika és a tapasztalati tudományok metodológiája között. Közöttük legjelentősebb helyet foglalja el G.W. Leibniz német matematikus, filozófus, logikus. Gondolatának lényege az volt, hogy össze kell kapcsolni a görög kultúrában született és évszázadokon keresztül különállóan létező két tudományágat, a matematikát és a logikát. Leibniz a logikát, mint a matematikához hasonló tudományt akarta kidolgozni. Ugy vélte, hogy mihelyst sikerül kidolgozni egy megfelelő jel-nyelvet - *characteristica universalis* - hogyha a logikai fogalmakat is matematikai jelekkel íránk fel, akkor a különböző nyelvű filozófusok teljesen megértenék egymást, illetve a logikában új ismereteket lehetne szerezni "számolás", logikai képletek segítségével, illetve egyszerű számolással eldönthető lesz minden probléma, még a filozófiaiak is. A logika jövőbeni fejlődésének útját tehát elég pontosan megsejtette. Ezen az úton saját maga tette meg az első lépéseket. Leibniz tulbecsülte az általa felfedezett logikai kalkulus lehető-

ségeit. Elgondolása azonban utópia volt, felfedezései, tervei megelőzték korát, ezért figyelmen kívül maradtak. Ha a filozófia és a mindennapi élet területén nem is, de a matematikában és a logikában célszerűnek és hasznosnak bizonyult az elképzelése.

A filozófiai gondolkodás során kezdetben csak határozatlanul és homályosan, később azonban egyre határozottabban és világosabban felismerték, hogy az emberi tudat és a nyelv rendkívül szoros kapcsolatban van egymással. Az ujkor gondolkodói közül Hobbes fogalmazza meg: Gondolkodni annyit jelent, mint szavakat használni. A gondolkodás jellegét hangsúlyozták a logika művelői is, de felismerték a nyelv és a tudat egységét a nyelvtudomány legjelentősebb képviselői is. (16)

Wittgenstein szerint a gondolkodás a nyelv értelmes használatával, a gondolat az értelmes állítással azonosul. Ezért indokoltnak tekinti, hogy a gondolkodás és a valóság hagyományos összehasonlítását a nyelv és a valóság összehasonlítása váltsa fel. Figyelemre méltó az a gondolata, hogy ismeretnek a szó igazi értelmében nem egyszerűen azt veszi, amit ki lehet mondani, - hiszen értelmetlenség is lehet a nyelvi burok alatt - hanem azt, amit világosan, egyértelműen lehet visszamondani. E megfogalmazás azt a kívánságot tükrözi, hogy a tudományos nyelvnek szükségszerűen meg kell felelnie a logika szigorú követelményeinek.

A materialista társadalomelmélet tette lehetővé először annak tudományos vizsgálatát, hogy milyen összefüggés van az emberi tudat és a gondolkodás társadalmi eszköze, a nyelv között, illetve azt, hogy a nyelv történetét a gondolkodás történetének megtestesítőjeként tanulmányozzák.

Elsősorban a logikában kerültek előtérbe a nyelv problémái: a matematikai logika ezeket a logikai kutatás speciális tárgyává tette. A nyelvészet elsősorban a természetes nyelvet vizsgálja; a nyelv logikai szempontu vizsgálata a tudományos nyelv elemzésével kapcsolódik össze. Minden ismeret nyelvi formában kifejezett ismeret; a megismerés során az objektumok taglalása nyelvi műveletekben ölt testet és az emberi megismerés fejlődése nem lehetséges a nyelv megfelelő csiszolása, finomítása, fejlesztése nélkül.

A XIX. sz. első felében még nagyon szegényes volt az az ismeretanyag, amit a logika fejlődése során feltártak a helyes gondolkodásról. De Morgan szerint az akkori logika még arra sem volt képes, hogy bizonyítsa az: "A ló állat, tehát a lófej állatfej" következtetés helyességét. A 19. század második felében azonban olyan fejlődésnek indult a logika, hogy felszámolta addigi elmaradottságát és nagyobb haladást ért el, mint a megelőző két évezred folyamán. A fejlődés a matematika/módszernek a logikában való alkalmazásában, a logikai kvantorok bevezetésében, a többargumentumu prédikátumok tanulmányozásában mutatkozott meg.

Az egzaktság egyre szigorubbá váló követelménye a matematikát mind közelebb vitte a logikához.

Közismert, hogy a matematikában a többi tudományhoz képest hamarabb dolgozták ki és alkalmazták a formulák nyelvét, amely lehetővé tette, hogy a matematika megállapításait néhány alapformula meghatározott szabályok szerint történt formális átalakításával fejezzék ki. A 19. század első felében - különösen az algebrában - felismerték, hogy egy és ugyanaz a formális nyelv egymástól teljesen különböző matematikai objektumokra vonatkozhat. Az algebra fejlődésével egyre nyilvánvalóbb volt az analógia a formális logika és az algebra szabályai között. A század közepétől ez az analógia tudatossá vált és öltött egyre határozottabb formát a matematikai logika. A matematikai módszerek meghonosodása termékenyítőleg hatott a logika fejlődésére.

A matematikai módszereknek a logikába való első rendszeres bevezetése G. Boole és De Morgan angol matematikusok nevéhez fűződik. A matematikai logikai kutatások kezdetben nem kapcsolódtak a tiszta matematikai kutatások alapvető irányzataihoz. Sok matematikus általában nem ismerte ezeket vagy pedig nem ismerte fel jelentőségüket. Azonban a logika alkalmazása és eszközeinek bővítése annyira szükségesnek bizonyult, hogy a matematikusok kénytelenek voltak a logikát egy újabb oldaláról is megközelíteni, a halmazelmélet oldaláról. Létrejön a halmazelmélet és a logikai algebra szintézise. (Schröder, Cantor, Dedekind). A halmazelméletnek a logikával való összefonódását a halmazelmélet rendkívüli absztraktsága tette lehetővé.

A logika fejlődésében a fordulatot az hozta, hogy Frege és Peano munkássága nyomán bebizonyosodott a logikának a matematika felépítésében való alkalmazhatósága, több vonatkozásban: a logika szerepelt az egzakt matematikai bizonyítás eszközeként, de felhasználták a matematikai fogalmak megvilágítására, továbbá matematikai elméletek létrehozására. Ezen vizsgálódások nyomán egészen átfogó és új irányú kutatások bontakoztak ki: a matematika elvi megalapozásának, a matematika alapjainak szabatos vizsgálata, amelyet a halmazelméletben felfedezett antinómiák tettek szükségessé. A logikának ezen új lehetőségeit B. Russell és A.N. Whitehead dolgozták ki a "Principia Mathematica" /c c. munkájukban. A szimbolikus logika fejlődésének első szakaszában a matematikát alkalmazták a logikára, a második szakaszban a matematikai logika segítségével rendszereztek és alapozták meg a matematikát. Közben maga a logika is tovább formalizálódott, meghatározott átalakításokat megengedő szimbólum-rendszerre vált, kialakult a formalizált logikai elemzés hatékony eszköztára.

A formális logikai nyelv megteremtése a modern matematika fontos eredménye. Az élő és a formális nyelv eltérése természetesen nem elvi jelentőségű, bár nem elhanyagolható. A köznyelv jelentősen elhomályosítja a közlés információ-tartalmát. Természetesen a köznyelvekben is vannak az értelmetlenség kiküszöbölésére szolgáló mechanizmusok. Pl. szabályozzák az értelmes mondatok strukturáját, némely szókapcsolatok megengedettek, mások viszont nem. A nyelv logikai elemzése bebizonyította, hogy a köznyelvi értelmesség

szokásos intuitív kritériumai megbízhatatlanságuk miatt nem alkalmasak tudományos problémák szabatos megoldására. Ilyen fogyatékok a köznyelveknek: a kifejezések többértelműsége, a természetes nyelv fordulatainak homályos logikai strukturája, továbbá zavaró a tudományos analízis szempontjából az is, hogy a mindennapi nyelv szorosan kapcsolódik pszichológiai asszociációkhoz. A nyelv nemcsak azt a célt szolgálja, hogy a gondolat formáját adekvát módon közvetítse (néha egyenesen ellentétes célokra használják). A természetes nyelv nagyon bonyolult. Az emberi érintkezés eszközeként jött létre, kacskaringós fejlődésen ment át, számos jelentésárnyalatot, jelentésváltozatot, többfunkciós neveket és kifejezéseket tartalmaz. Sok hallgatólagos megegyezést tételez fel és ebben a nyelvben sok minden nem fejeződik ki. (16) Különbség van a formalizálás mértékében is. A matematikai logika nyelvének formalizálása olyan fokot ért el, amely megfelel a matematikai apparátus magas fokú formalizáltságának. Ez tette lehetővé többek között a logikai kifejezések szabatosságának, pontosságának, egyértelműségének elérését.

A szimbolikus logika fejlődése hosszú időn keresztül a matematika axiomatikus vizsgálódásai vonalán haladt. A kutatásoknak ez az irányzata D.Hilbert, Neumann János, K.Gödel, A.Tarski és mások neveivel kapcsolatos.

A logika mint tantárgy a tanárképző főiskolai
és a középiskolai oktatásban

A Matematikai Tanszéken hat év óta folyik a matematika szakos főiskolai hallgatók logika oktatása. Az oktatási cél meghatározásánál alapvető, hogy e tárgy a logikus gondolkodás törvényeit matematikai módszerekkel elemzi, s így tudatosan nevel helyes gondolkodásra.

A logika törvényei objektívek, adekvát módon tükrözik a valóságot. A logika törvényei sem meg nem szüntethetők, se nem teremthetők; de megismerhetők és alkalmazhatók. Mégis van a logika törvényeiben eltérés az egyéb természeti törvényektől: A logika törvényeihez más a viszonyunk, mint a többi törvényhez. A logika törvényei ugyanis megnyilvánulnak gondolkodásunkban - amennyiben helyesen gondolkodunk - még akkor is, ha nem ismerjük őket. Ösztönösen is lehet a törvényeknek megfelelően gondolkodnunk, ismeretük azonban elősegíti tudatos alkalmazásukat, azt, hogy a fogalmakat, kijelentéseket, a logikai műveleteket eredményesebben használhassuk fel a megismerési folyamatban. (15)

A logika oktatásának tehát kettős feladata van:

1. Megismertetni és tudatosítani a helyes gondolkodás formáit, törvényeit, szabályait. Nevelni a hallgatókat a törvények és szabályok tudatos alkalmazására. Az oktatásnak ez a része filozófiai, -ismeretelméleti feladat.
2. A tanárjelölteket tudatosan fel kell készíteni arra, hogy az általános iskolai tananyag oktatásakor egyben logikus gondolkodásra neveljék tanulóikat, hogy óráikat logikailag is helyesen építsék fel, hogy biztosítsák a pedagógiai tevékenység hatékonyságát. Ez pedagógiai feladat.

Az utóbbival kapcsolatban azt valljuk, hogy az ismeretek átadása során a hallgatóink értelmi tevékenységének, önálló gondolkodásának fejlesztésére külön gondot kell fordítani. A pedagógusoknak, a jelölteknek, hogy ezt a feladatot teljesíthessék, ismerni kell a logikai törvényeket és szabályokat és tudatosan fel kell készülni e feladat végrehajtására.

A hallgatóinknak oktatott logika szimbolikus logika, amely azonban tartalmaz fejezeteket a hagyományos formális logikából is.

Az 1847-1910 évek közötti kornak a logika terén elért nagy felfedezéseit és fejlődését nem minden logikus vette tudomásul, hiszen napjainkig megmaradt néhány iskolában az a logika, amely az említett felfedezésekkel teli időszak sem-

miféle eredményét nem foglalja magába. Ezek továbbra is a hagyományos logikát magyarázzák, noha ez a modern oktatási rendszerben egyre korszerűtlenebbé válik.

Számos klasszikus logika könyv létezett, a felszabadulás előtti egyetemi oktatásban is. Nem célunk ezek ismertetése és elemzése. Csak a Tanárképző Főiskolákon az utóbbi években használatos könyvek egyikéről szándékozunk szólni.

Egy ilyen logika könyv a (4). Lényegét és különösen a szimbolikáját tekintve nem lép túl az Arisztotelész által kidolgozottakon. Csak fogalomváltozókat használ. A matematikai logikáról is szó esik ugyan, egyetlen helyen, az Előszóban: "Korunkban a logika különböző ágai örvendetesen fejlődnek. E megállapítás különösen a matematikai logikára vonatkozik. Reméljük, hogy a jövőben a kutatásai (t.i a matematikai logika kutatásai) arra is kiterjednek, hogyan lehet elméletét a különböző konkrét ovodai foglalkozások, illetve tanítási órák keretében is alkalmazni, s ezáltal az oktatás határfokát a matematikai logika segítségével megalapozni és növelni."

Ugy vélem, a könyv szerzője nyitott kapukat dönget, mert a különböző - matematikatanítás korszerűsítését szolgáló - kísérletekben kiadós logikai anyag is szerepel és elég egy-két ilyen tanítási órát megnézni, hogy lássuk, ezeket az ismereteket játékosan, szinte ovodai szinten sajátítják el a tanulók. Sajnálatos, hogy egyedül a matematika tanterve

foglalkozik a logikai képzés részleteivel, noha a matematikai logika nem a matematika logikája, csak annyiban, amennyiben minden más tárgyé, tudományé.

A könyv tárgyának feldolgozásában is a hagyományos formális logikát követi: "A logikai alapvetés és logikai törvények" című fejezet után tárgyalja a fogalmakat, ítéleteket, a logikai műveleteket.

Nagy részletességgel foglalkozik a szillogizmusokkal (12 oldal). Nem versbe rejtve, hanem táblázattal adja meg a szabályoknak megfelelő 19 kategorikus szillogizmus "alakzatainak módozatait."

Szerencsére az új logika tankönyvek és jegyzetek többsége már figyelembe veszi a logika fejlődésében bekövetkezett nagy fordulatot és ennek megfelelően szimbolikus (matematikai) logikát tartalmaz.

Jó példák erre a (21), (22).

Talán a "matematikai logika" elnevezés nem szerencsés, mert ez lehet alapja annak a félreértésnek, hogy a szóban forgó tudomány a matematika logikája. Pedig csak matematikai módszerű tudomány a szimbolumok alkalmazása révén. A kijelentések szimbolumokkal való jelölése mint láttuk nem újkeletű: már a hagyományos logikában is előfordult hasonló, de csak rövidítés céljából. A szimbolumok logikai használatában az eredményezte a döntő változást, amikor a következtetéseken előforduló kijelentések szerkezetét is szim-

bolumokkal fejezték ki és a logikusok tanulmányozni kezdték ezeket a kijelentések szerkezetét kifejező szimbolumokat és a szimbolumok közötti kapcsolatokat. Ezen vizsgálódások eredményeként adódott, hogy a logika a szimbolumokkal végzett formális műveletek végzésével kiszámítja a következtetések helyességét. Ennek segítségével nagyon egyszerűen és logikailag is indokoltan dönthető el pl. hogy egy adott szillogizmus helyes-e vagy sem. A Venn diagrammok alkalmazása fölöslegessé teszi a verses szabályokat vagy akár a táblázatokat is. Ebből az is látható, hogy a hagyományos logika eredményei szervesen beilleszthetők a modern logikába.

Másik oka lehet a matematika és a matematikai logika gyakori szoros összekapcsolásának az, hogy a logika elemei a matematikatanításban úgy tekinthetők, mint a helyes matematikai tevékenységhez szükséges segédeszközök. A matematikai tevékenység kialakításának két szakaszában szükségességek: Egyik a rendszerezés előtti szakasz, amikor a természetes gondolati tapasztalatok - amelyek még nem tudatos, hanem intuitív, szóval még nem fogalmazott és csak egyes helyzetekben felfogott tükröződései egy logikai strukturának - a szóban forgó logikai struktúra egy bizonyos tudatos felfogáshoz vezetnek. A másik szakasz a rendszerezés, a formalizálás szakasza, amelyek a kialakított és alkalmas nyelven kifejezett intuíciók általánosítását és használható formalizálását végzik el. (17)

A logika bizonyos elemei a hagyományos matematikaoktatás során is előkerülnek, szűk terjedelemben, de a hagyományos tanítás az előbb említett első szakasznál megáll, és bizalmatlanul tekint minden formalizálásra.

A hagyományos formális logika nem készíti elő a tanulókat arra, ami a korszerű matematikatanításhoz kell, de az is kétséges, hogy egyáltalán - bármely területre - alkalmazható ismereteket ad. A hazai középiskolai oktatásban azonban még ez a viszonylag szerényebb eredményeket adó logika sem szerepel tantárgyszerűen, órarendi keretek között. 1958-59-ben több gimnáziumban kísérletképpen bevezették a logika oktatását. Komoly tehertétellel indult, mégis helyes volt a bevezetése és előrelépést jelentett. A logikai képzésben mutatkozó hiányok felszámolását és a materialista világnézet erősítését várták a tárgytól. Elhelyezése nem volt szerencsés, mert a negyedik év második felében került rá sor. Ez a félév rövidebb a többinél az érettségi miatt, éppen ezért már a formai keret is elégtelennek bizonyult a tantervi anyag érdemi feldolgozásához. A tantervekkel sem volt minden rendben. A Balázs féle tanterv nem jelölte meg az egyes témákra fordítandó óratervet. A Tamás féle tanterv mind a 24 órára új anyagot írt elő, ami - enyhén szólva - didaktikailag vitatható. Ismétlés, rendszerezés nélkül kétséges a tárgy eredményes elsajátítása. Erre legalább 4 órát kellett volna fordítani, ez pedig zsúfolttá tette volna a megmaradt 20 óra terhelését. A tananyag feldolgozása sem volt a legsikeresebb. A tanulók nem értették miért kell annyi-

féle ítéletet, következtetést megtanulniuk és öncélunak tűnt számukra a tananyag. Ez nem is meglepő, mert egy kicsit skolasztikus izű volt. Nem nyújtott alkalmazni képes ismereteket. Pusztá szabályok felsorolásából állt, nagyfoku verbalizmus jellemezte. De nem volt hatékony a világnézeti nevelésben sem. A tanulók a logika keretében megismerték a marxista filozófia lényeges elemeit. Ezek azonban csak minimálisak voltak és nem olvadtak egységbe sem a logikai és általában a gimnáziumi tananyag egészével sem. A hamar nyilvánvalóvá váló hibák mellett a tárgy oktatásának pozitívumai is voltak. Megmutatkozott a tanulók érdeklődése a filozófiai kérdések iránt. Ez az érdeklődés jó keretet teremtett a tanárok számára a direkt világnézeti neveléshez. A logika tanulmányozása feltételnül tágitotta az objektív valóságról kialakult képet azzal, hogy az emberi gondolkodásról szóló ismereteket tárt a tanulók elé. (7), (2), (3), (5), (28), (30). Az iskolareform során - amelyben nagyobb gondot fordítottak a gyakorlati oktatásra és képzésre - a logika mint tantárgy, egyszerűen kimaradt, mert nem volt rá idő. Ha azonban a logikát mint tárgyat nem is oktatjuk, a logika tudás követelménye fennmaradt.

A logika ismeretek tanításának legoptimálisabb és egyben kényszerű megoldását az jelentené, hogy a logika ismereteket szétosztanák más tárgyak keretei közé. Ezt a gondolatot sugallja a logikai ismeretek és a gimnáziumi tananyag nagyfoku koncentráltságának szükségessége. A logikai ismeretek felhasználása ezen az uton konkrétta, kézenfekvővé

válhat, természetes kapcsolat alakulhat ki a logikai eljárások, szabályok, törvények és alkalmazásuk lehetősége között. A logikát így a dialketikus valóságba ágyazva tanítanánk. Gyakorlatilag ez azt jelentené, hogy az egyes tárgyak tananyagában tudatosan figyelünk a logikai összefüggésekre, kiemeljük, tudatossá tesszük azokat. A szaktárgyi tankönyvek szerzőinek kellene nagyobb gondot fordítani a logikai összefüggések tudatos szerepeltetésére. Azonban ez a kívánság is csak kívánság maradt és marad a bővülő szaktárgyi ismeretanyag és a csökkenő óraszámok ellentmondása miatt. Nem várható, hogy a logikáért kihagyjanak valamit a megnyirbált szaktárgyi anyagból, még akkor sem, ha a tanulók logikai iskolázottságának növekedésével a szaktárgyi munkájuk is eredményesebb lesz. Az tehát, hogy a tanulók a szaktárgyak mellett úgy "mellékesen" elsajátítsák az alapvető formális logikai ismereteket is, nem megy. Ugy gondolom, a személyi feltételek sem a legideálisabbak, illetve a tanároknak éppen elég a szaktárgyakat megtanítani. (5), (17).

A napjainkban végbemenő a matematikatanítás modernizálását célzó reform azokra a nálunk és külföldön elvégzett nagyszámu pszichológiai-pedagógiai kísérletekre épül, amelyek bizonyítják, nem szabad meghatározott koru tanulókhöz meghatározott gondolkodási szintet rendelni.

A magasabb gondolkodási szintre való átmenet megfelelő előkészítő munkával a szokásosnál korábban elérhető. A tanulók általánosító, absztraháló és meghatározott logikai

műveletek elvégzésére való képessége nincs annyira korhoz kötve, mint azt régebben gondolták, illetve már fiatalabb korban is jelentősen fejleszthető. Pl. néhány évvel ezelőtt az algebrai alapismeretek csak az általános iskola 8. osztályában szerepeltek, azon az alapon, hogy a betűkkel jelölt tetszőleges számokkal végzett műveletekhez szükséges gondolkodási szint meghaladja a 13 évesnél fiatalabb diákok képességeit. Az elvégzett kísérletek azt bizonyítják, hogy az algebra alapfogalmainak tanítására már a 6-8 éves korban lehetőség van.

A halmazok közötti relációk, a halmazokon végzett műveletek a megfelelő gondolkodási tevékenységekben tükröződnek. Ezek alkotják a logikai műveletek, illetve a halmazelméleti fogalmakon alapuló matematikai fogalmak értelmezésének az alapját. A halmazelméleti fogalmak kialakítása tehát azt a célt szolgálja, hogy a tanulóknak kialakuljanak azok a fontos gondolkodási műveletek, amelyek elősegítik eredményesebb és gyorsabb logikai fejlődésüket. (17)

Más fogalmazásban tehát a matematikaoktatás logikai és egyéb problémáinak megoldásához a pszichológiai tényezők figyelembevétele nem azt jelenti, hogy az oktatás egyszerűen alkalmazkodik az adott koru tanulóknak pszichológiájához, hanem olyan módszertant feltételez, amely biztosítja a tanulóknak adott fokon elérhető maximális fejlődését és meggyorsítja a magasabb gondolkodási szintre való áttérést.

Az a nyelv, amivel az iskolákban a matematikát tanítják, nem azonos sem formájában, sem tartalmában a vizsgált matematikai elmélet nyelvével. Az oktatás ugyanis kevésbé formalizált, mint a szóban forgó matematikai elmélet matematikai nyelve, de a formalizáltsága meghaladja a természetes nyelvét. Köztudott, hogy az iskolai oktatásban már régóta szerepelnek olyan matematikai szimbolumok, amelyek nagyon közel esnek a formális matematikai apparátushoz. Persze az iskolai algebrában mindig számokat értünk a betűkön. Mégis az elgebrai kifejezések átalakításánál előírt formai szabályok szerint járunk el és közben nem gondolunk a kifejezések számok felhasználásával történő interpretációjára, illetve a használt műveletek és tulajdonságaik konkrét értelmére. (25), (26)

Az oktatás nyelve azért is különbözik az általa leírt elmélet nyelvétől, mert ami az oktatás nyelvében megtalálható, nem mind tartozik tartalmilag a matematikai elmélet nyelvéhez. Ilyenek pl. a különböző szemléltetésekhez használt magyarázó szövegek.

Nem feltétlenül kell azonban egy szövegnek matematikától idegen terminusokat tartalmazni ahhoz, hogy ne tartozzék a matematikai elmélet nyelvéhez, hanem csak az oktatás nyelvéhez. Pl. a konkrét példák alapján felismert, de logikailag nem bizonyított összefüggések megfogalmazásai is csak az oktatás nyelvéhez tartoznak.

A matematika tanításában a logika tehát gyakran különbözik a tanulmányozott matematika logikájától. Az eltérések első-

sorban pszichológiai körülményekből adódnak.

A tanítási nyelv tartalmazza mindazt, ami biztosítja, hogy a tanulók elsajátíthassák a tanterv által előírt elméleti részt: a példák, kísérletek, indukciók, analógiák alkalmazásának leírását, magyarázatát. A tanítási nyelv kidolgozása a matematikai oktatási módszerek egyik legfontosabb feladata.

A hagyományos módszereknek volt néhány hiányossága. Egyik ilyen hiányosság az, hogy csak matematikai fogalmakat illusztrál a tradicionális módszertan. Figyelmét csak azoknak a matematikai fogalmaknak a leírására fordítja, amelyek tárgyak tulajdonságait tükrözik. (26) Emiatt nem szerencsés a kapcsolat a között, ahogy a matematika tanulmányozza saját objektumait és ahogy az iskolában tanulmányozzák azokat: A matematika nem különálló elemeket, objektumokat tanulmányoz, hanem elemeknek egy halmazát. Ezeknek a halmazoknak a szerkezetét vizsgálja, azt, hogy milyen relációk teljesülnek az elemei között, és hogy az elemeken milyen műveletek hajthatók végre, illetve ezeknek a relációknak és műveleteknek a tulajdonságait. A matematika formákat (algebrai vagy geometriai) tanulmányoz és nem tárgyakat, objektumokat, amelyeknek ilyen a formájuk; mennyiségi összefüggéseket vizsgál és nem tárgyakat, amelyek között ezek a mennyiségi összefüggések érvényesek. A különböző egyedi adottsággal rendelkező elemek halmazai rendelkezhetnek ugyanazon szerkezettel, vagyis különböző elemekből álló halmazon teljesülhet ugyanolyan tu-

lajdonságu reláció. A matematika ezeket a relációkat vizsgálja és nem érdeklik az elemek tulajdonságai.

A matematika fejlődése során megnövelte a vizsgált viszonyok és fogalmak körét, ezzel lehetővé tette saját alkalmazási területének kiszélesítését. A tradicionális értelemben vett mennyiségi viszonyok és térbeli formákon kívül a valóság más viszonyait és formáit is tanulmányozni kezdte; ezek azonban csak hasonlóak az előzőkhöz. Meglepő analógiákat fedeztek fel néhány nem mennyiségi viszony és hagyományos mennyiségi viszonyok között. Ez tette lehetővé, hogy a tudomány és a gyakorlat új területein is matematikai módszereket dolgozzanak ki és alkalmazzanak. (Pl. nyelvészet, biológia, orvostudomány.)

A matematika iskolai oktatásának hagyományos módszere a különálló tárgyak tanulmányozását tartja szem előtt és nem vizsgálja a tárgyak közötti relációkat ill. a műveleteket különböző halmazokon. Ez pedig nem teszi lehetővé, hogy a tanulók megértsék a matematika korszerű alkalmazásait, logikailag sem készíti fel őket arra, hogy az alkalmazásokat a jövőben megértsék. Csak néhány primitív alkalmazási területet ismernek. (25), (26)

Másik komoly hibája a matematikai oktatás hagyományos módszereinek, hogy az oktatás folyamán egyáltalán nem foglalkozik a matematikai logika nyelvének tanulmányozásával. Az az ellentmondásos helyzet alakult ki, hogy a matematikai tételekben egyes (matematikai) terminusok egzakt pontos értelmét megmagyarázzák a tanítás folyamán a tanulóknak, ugyan-

akkor más (logikai) terminusok értelmét nem magyarázzák meg, noha ezek megértése is nélkülözhetetlen a tételekben kifejezett tények lényegének megértéséhez.

Nap, mint nap előfordul, hogy egy-egy tételt más tételekből vezetnek le, de az oktatás egyik fokán sem (sem a középiskolákban, sem az általános iskolában) nem magyarázzák meg, mit jelent az, hogy "egyik tétel logikailag következik másokból."

Az általuk elvégzett matematikai műveletek, eljárások tulajdonságait megértik és tudják a tanulók; nem ismerik azonban a legalább olyan gyakran használt logikai műveletek tulajdonságait. Ez utóbbit ugyanis senki nem magyarázza el nekik. Nagyon gyakran ez a hiányosság az oka azoknak a nehézségeknek, amelyek a tanított matematikai anyag elsajátításakor jelentkeznek. A problémák gyökere nem matematikai, hanem logikai természetű, de szakmai szinten mutatkozik meg. Ha ugyanis nem értik a tanulmányozott anyag logikáját, akkor nem értik a szóban forgó anyagrészt sem. (26)

Természetesen a hagyományos módszertan is igyekszik kiküszöbölni, megelőzni ezeket a nehézségeket: növelik az interpretációk, példák számát, többször is elmagyarázzák a meg nem értett logikai-matematikai konstrukció matematikai részét, bár a nehézségek oka a probléma logikai részének meg nem értésében rejlik. Sokszor előfordul, hogy a tanulókkal olyan gyakorlatokat végeztetnek, amelyek különlegesen kiválasztott logikai műveletekkel vannak megnehezítve, de ezeknek a logikai műveleteknek az értelmét és tulajdonságait

sem előbb, sem utóbb nem ismertetik.

Mindezek azzal járnak, hogy lassul az oktatás menete és lassu a tanulók fejlődése is. Az ismétlések, a gyakorlatok nem haszontalanok ugyan, de hatásosabbak lennének, ha a tanulók tudnák, hogy mit ismételnek, gyakorolnak. Meg kell magyarázni az előforduló logikai műveletek lényegét és ezzel nagyon sok akadályt elgördíthetünk a matematikai elmélet megismerésének útjából. (13)

Azok a módok, amelyek alig veszik figyelembe a matematikai logika nyelvét, nem elég hatásosak ahhoz, hogy biztosítsák a tanulók számára a mélyebb matematikai ismeretek elsajátítását, de ugyanakkor nem segítik elő logikai fejlődésüket sem. Szó sincs azonban arról, hogy a hagyományos módszerek semmilyen fejlődést nem eredményeznek a tanulók logikai gondolkodásában. Azok is érnek el némi fejlődést, de ez a fejlődés nem olyan mértékű, mint amilyen szükséges lenne, és főleg nem olyan, mint ami elérhető lenne, ha a tanulók tudatosan használnák a logikai műveleteket.

Lehet a matematikát a logikától elválasztva is tanulni, noha erősen összefonódott a két tárgy, de az ilyen oktatás hatásfok^aon nagyon alacsony.

A matematika módszertanának irodalmában régóta vitatják azt a problémát, hogy a logika elemeit is tanítsák a matematika tanítása mellett illetve ezzel kapcsolatosan. Matematika-oktatási konferenciákon is többször előkerült ez a kérdés.

Különböző kísérletek is ismeretesek a probléma megoldására, de a kísérletek eredményei nem kerültek át az oktatási gyakorlatba. A sikertelenségek láttán sokakban megerősödött az a vélemény, hogy nem szabad és nem is kell tanítani a logikát a matematikában, hogy nemcsak mi, hanem a tanulók is helyesen ítélkeznek a logika ismerete nélkül is. Igaz, logikával nem foglalkozva is lehet logikusan gondolkodni, különösen viszonylag egyszerű helyzetekben és a tanulónak az iskolai matematikában leggyakrabban éppen ilyenekkel van dolga. Az is igaz, hogy az emberek helyesen végzik el a logikai mérlegelést, anélkül, hogy a következtetések szabályait ismernék: ezt a társadalmi életben megszerzett élettapasztalatok biztosítják. Azonban az sem vonható kétségbe, hogy a mérlegelési készség, a következtetni tudás különböző embereknel nem azonosan fejlődött ki. Némelyeknél, akiknek gyakran van alkalmuk - esetleg szükségük - formális következtetést elvégezni, ez a készség jobban kifejlődött, másoknál, akik hasonlókkal ritkábban találkoznak, kevésbé. A matematika tanulásakor nagyon gyakran fordul elő, hogy következtetést kell végezni. Ez az értelmi tevékenység a tanuló-tól elégséges fejlettségi szintet követel. A természetes gondolkodás - a hagyományos vélemény szerint - a matematika tanítása során erősödik és javul és nincs szükség arra, hogy egy speciális nyelven, logikai jelekkel és kifejezésekkel leírjuk. E vélemény szerint ez a nyelv semmi hasznot nem eredményez, mert az ember nem attól tanul meg helyesen gondolkodni, hogy logikai formulákat tanulmányoz, mivel a ter-

mészetes ész, a gondolatbeli tapasztalatok a leghatásosab-
bak ezen a téren. (26), (32)

Tény, hogy a logikát nem tudjuk tanítani, de nem is kell
tanítani a matematikaórákon, de megtaníthatjuk és meg kell
tanítani azokat a logikai műveleteket és bizonyítási, le-
vezetési eljárásokat, amelyeket a matematika tanítása so-
rán használunk.

Napjainkban, amikor a matematika logikája maga is matema-
tikai ággá vált, újszerűen merül fel a tanítási nyelv ki-
dolgozásának problémája, mert a matematika logikáját ta-
nulmányozva, végeredményben a matematikát tanulmányozzuk.

A matematikai logika nyelvét lehet és kell korszerű formá-
ban tanulmányozni, mert a matematikai logika nagyon kényel-
mes matematikai munkaapparátust dolgozott ki és ez hatáso-
san alkalmazható az iskolai oktatásban is. A matematikai
logika adja meg a lehetőségét annak, hogy a tanulók megis-
merjék a legfontosabb alkalmazás lehetőségeit a korszerű
technikában, kiszélesíti a matematikai képzés politechni-
kai irányát. Pedagógiailag is jelentős a matematikai logi-
ka nyelvének tanulmányozása: a matematikai logika nagyon
eredményes hatást gyakorol a tanulók világos, szabatos,
pontos gondolkodásának kialakításánál.

A matematikai logika oktatását nem úgy képzeljük el, mint
egy sajátos tárgy oktatását vagy valamilyen alkalmazás ok-
tatását, hanem úgy, mint a matematikai oktatás elválaszt-

hatatlan részét.

A logikai szimbolumok alkalmazását nem szabad alapos meg-gondolás nélkül elvégezni. A szimbolumok alkalmazása nem jelentheti a logikai műveletek teljes formalizálását, mert ez semmiképpen sem vezetne a tanulók logikai fejlődéséhez. A hazai általános iskolai ideiglenes reformterv is ezt veszi figyelembe: előírja, hogy a tanulók az első osztály-tól kezdve megismerkedjenek a legegyszerűbb logikai műve-letekkel, a műveletek tartalmával, nem javasolja viszont a műveletek formalizálásának bevezetését, sőt óv ettől. A kö-zépiskolában azonban elengedhetetlennek kellene lennie. A túl korai formalizálás valóban veszélyekkel jár. Azonban miközben elkerüljük a túl korai formalizálással járó veszé-lyeket, vagyis miközben még az egyszerű és részleges formali-zálást is elkerüljük, a tanítást egy másik veszély fenyegeti: a tanítás nyelvének pontatlansága miatt rejtve marad a ta-nulók előtt a definíciók, tételek, bizonyítások logikai strukturája. (27), (29)

A logikai hibákat kijavítják és megbeszélik a jó tanításban - még a hagyományosban is - de nem vizsgálják általánosabban a szóban forgó gondolatokat. Igaz, ez nehéz is lenne bizonyos formalizálás és megfelelő szimbolumok bevezetése nélkül.

A matematikai logika szimbolikus nyelvének pontosságát, rö-vidségét, áttekinthetőségét kell felhasználni. Ezek elősegi-tik, hogy a tanulók gondolkodása is analóg módon menjen vég-be. A logikai szimbolumokat éppen ezért nem értelem nélküli

jelekként kell bevezetni, amelyekre meghatározott formai szabályok érvényesek. A logikai szimbolika is - a matematikához hasonlóan - csak tartalmi alapon tanítható.

Az alapvető pedagógiai probléma, amit itt felmerül, nem elsősorban a szimbolumok bevezetése, hanem a matematika logika nyelvének tanulmányozása. A szimbolumok bevezetése is a problémához tartozik, de ennek csak egy része. Része, amellyel néha meg akarják kerülni a kérdés egészét. A logikai szimbolumokat nem öncélúan kell megismertetni, hanem alkalmazásukat alá kell rendelni a fő célnak, a matematikai logikai nyelv tanulmányozásának, annak érdekében, hogy a tanulók megértsék az általuk elvégzett logikai műveletek tartalmát. (17)

A tanulóknak el kell érni némi jártasságot a szimbolumokkal való számolásban, a formális műveletek elvégzésében is. Ez a jártasság azonban a logikai műveletek és tulajdonságaik tartalmi megértésén alapuljon.

A következtetéseknek is csak a tartalmával foglalkozik a hagyományos módszertan, de nem érinti a következtetések formáját, logikai szerkezetét. Ez pedig nem mozditja előre annak a képességnek a fejlődését, hogy ugyanazt a logikai struktúrát, ugyanazt a formát, szerkezetet más tartalmu következtetésekre is alkalmazni tudják, ugyanis a logikai szerkezet a tanulók képzeletében, gondolkodásában elszakíthatatlan kapcsolatban marad a szóban forgó tartalommal. Ugy is mondhatjuk ezt, hogy hiányzik vagy nagyon ritkán következik

be a "transzfer" jelensége. A transzfer hiánya jól ismert minden matematikatanár előtt: Pl: A tanuló megtanulja és igazolja a befogótételt az egyik befogóra, de ugyanazt nem képes elvégezni a másik befogóra, vagy egy másik példa: A tanuló helyesen bontja fel tényezőire az $a^2 + 2ab + b^2$ trinomot, de nem boldogul az $x^2 + 4x + 4$ felbontásával. (25)

Az állítások, következtetések logikai szerkezetének tanulmányozására és a tartalomtól való elválasztására változtatni kell a tartalmukat: különböző tartalmu, de azonos logikai felépítésű következtetéseket kell vizsgálni és meg kell mutatni, hogy mi a közös logikai szerkezetük és ezt a logikai szerkezetet el kell vonatkoztatni konkrét tartalmuktól. Ez az eljárás azonban számos példát tesz szükségessé és nagyon időigényes, továbbá feltételezi, hogy a tanárok kellő mennyiségű és szintű formális logikai ismeretekkel rendelkeznek.

Felmérés a főiskolára kerülő matematika szakos
hallgatók logikai iskolázottságáról

A hallgatóink logikai előképzettségének gyengeségét és hiányait évek óta tapasztaljuk. A pontosabb megismerés miatt két évfolyamnál - matematika szakos hallgatókról van szó - felmérést végeztünk. A tesztek kérdéseit úgy állítottuk össze, hogy mind a szemantika, mind a szintaxis területén meglévő hiányosságokra rávilágítsanak. Egybekötöttük ezt a vizsgálódást annak tanulmányozásával is, hogy mennyire hatékony a matematika szakos hallgatók számára előírt fél éves (1 + 1 óraszámban tartott) matematikai logikai kurzus illetve, hogy milyen hiányosságok maradtak meg a studium után is a hallgatóink gondolkodásában. Éppen ezért a logika módszeres oktatása előtt is végeztünk egy felmérést és a kurzus befejezése után is. A második összeállításnál már figyelembe vettük az első tesztlapon elkövetett gyakori hibákat és a részletezés főleg a problémásabb esetekre vonatkozott.

A méréssel az volt a célunk, hogy tájékozódást szerezzünk a különböző középiskolákból a főiskola matematika szakára került fiatalok logikai előképzettségéről, abban az értelem-

ben, hogy mennyire ismerik azokat a logikai strukturákat, általában, amelyeket órarendi keretek között kifejtve nem hallottak, de amelyekkel konkrét formában a szaktárgyi órákon találkoztak.

A tudásszintmérés kiterjedt valamennyi nappali tagozatos elsőéves matematika szakos hallgatóra. Ugy gondoljuk, hogy e mérés eredményéből levont következtetések nemcsak a vizsgált hallgatók körére érvényesek, hiszen a vizsgált populáció az ország három megyéjének középiskoláiból verbuválódott, közös élményeik a főiskolán még nem voltak: tekinthetők egy országrészből vett (igaz, nem reprezentatív) mintának. A tapasztalataink ezért jellemzőek a hasonló koru, hasonló tanulmányi eredményű (tehát közepes, vagy annál kevésbé jobb, de nem kiváló) tanulókra. (1)

A hallgatók logikai ismeretének megjelenési formái, elemei közül vizsgáltuk a tényeket, a fogalmakat, a következtetési szabályokat. Nemcsak az érdekelt, hogy milyen mennyiségű ismerettel rendelkeznek, hanem az is, hogy amit tudnak, milyen szinten tudják, mennyire tudják felhasználni.

Az összeállításban elvégeztettük a hallgatókkal a ráismerés műveletét. Ezzel azt próbáltuk megállapítani, a hallgatóság milyen része nem jutott el ismereteiben még erre a szintre sem. A véletlenül helyes ráismerés lehetőségét azzal próbáltuk csökkenteni, hogy négy lehetőséget adtunk meg, bár helyes válasz esetén a négy lehetőségből kettőt kellett meg-

jelölni. A matematika tanítása során nagyon gyakran találkoznak a tanulók a tagadás műveletével. Kijelentés tagadásának felismerését vártuk egy példacsoportban, egy következő csoportban a megnevezését, illetve egy összetett kijelentés tagadásának megfogalmazását. (Operatív alkalmazás a külső algoritmus szintjén.)

A hallgatóktól megkérdeztük néhány implikáció megfordítását is. Ennél a feladatcsoportnál is a kérdezetteknek kellett megfogalmazni a szóban forgó tétel megfordítását.

Terjedelmes rész foglalkozik a "következménye" relációval, ennek felismerésével. Ugy vélem, ennél a példacsoportnál a leginkább vitatható az eredmény értéke. Nem lehet tudni ugyanis, hogy ha valaki helytelen választ adott, a logikai szerkezetet, vagy a szaktárgyi rész összefüggéseit nem látta át.

A feladatlapok kitöltésére egy órát kaptak a hallgatók, a mérésben 163 hallgató vett részt.

A feladatlapon nyolc feladatcsoport szerepelt, különböző számossággal. (1 sz. melléklet)

I. Az első csoport annak megállapítását kívánta, hogy két predikátum ekvivalens-e, vagy sem, vagyis a különböző formában megjelenő azonos tartalom felismerését. Néhány ilyen pár: " $a \leq b$ " - " a legalább b ", " $a \leq b$ " - "Van olyan pozitív szám, hogy $a + x = b$ ", s.i.t. Legkevesebben hibáztak az " $a \leq b$ " - " a nem nagyobb b -nél" egybeve-

tésénél, mindössze 6 hallgató. Legtöbben hibáztak az " $a \leq b$ " - "Van olyan pozitív x szám, hogy $a + x = b$ " összehasonlításánál. 70 hallgató (több mint 40 %) hibázott. 19 lapon válaszként "nem tudom" szerepelt.

Ugy gondoljuk azonban, hogy ennél a feladatnál a nehézség nem logikai, hanem algebrai és oka a következő: a két predikátum összehasonlításánál figyelmen kívül hagyták, hogy míg az első tartalmazza az egyenlőség, a megegyezés lehetőségét, tehát bizonyos információhiányt is kifejez, addig a második határozott nagyságviszonyt jelent a és b között, mert kizárja azt az esetet, hogy x zérus lehessen.

- II. A második csoport fogalompárok tartalmi egybeesésének felismerését, eldöntését kívánta. Ilyenek voltak pl. "négyzet" - "egyenlő oldalú téglalap", "rombusz" - "ferdeszögű négyzet", s.i.t. Az említett első fogalompár azonosságát ismerték fel legtöbben, 156-an. Nagyon sokan hibásan azonosították viszont a "négyzet" - "egyenlő oldalú deltoid" és a "rombusz" - "ferdeszögű négyzet" fogalmakat. (38, illetve 113 hallgató)

A tévesztéseket az eredményezte, hogy rosszul végezték el a fogalmak tartalmának, lényeges ismertető jegyeinek egybevetését és megegyezőnek tekintettek alá- ill. főlérendelt fogalompárokat.

- III. A harmadik csoportban a matematikai bizonyításoknál is számos alkalommal előforduló legegyszerűbb logikai mű-

velet, a tagadás szerepelt. A felismerés szintjét vártuk el hallgatóinktól. Megadott kijelentéspároknál kellett felismerniök, hogy azok egymás tagadásai-e. A válaszra négy lehetőség volt: 1 tagadása a 2-nek, - 2 tagadása az 1-nek, - Egyik sem tagadása a másiknak, - Nem tudom.

Az eredményekből azt állapítottuk meg, hogy a tagadás tartalmát nem értik és legfeljebb csak formális, külső ismérvek alapján jelölik ki egy kijelentéshez a tagadását. A tagadást leszűkítve használják, nyelvi formához és nem logikai tartalomhoz kötik: az a kijelentés tagadása a másiknak, amelynek nyelvi megfogalmazásában szerepelnek a következő szavak: nem, nincs, egyetlen sem, nem igaz, stb. Nem látják az "x tagadása y-nak" reláció szimmetrikus tulajdonságát.

Például: 130 hallgató jelölte meg "Az A pont az a egyenesen van" és "Az A pont nincs az egyenesen" kijelentések közül a másodikat az első tagadásának. Ugyanigy tett 135 hallgató az

"x osztója y-nak és x osztója z-nek"

és a

"Nem igaz, hogy x osztója y-nak és x osztója z-nek" kijelentésekkel. De csak 5, illetve 7 hallgató vette észre, hogy az első kijelentés is tagadása a másiknak. Általános elbizonytalanodás mutatkozott viszont a "Minden kutya fekete" - "Van olyan kutya, amelyik fehér" párnál.

60-an jelölték meg az elsőt tagadásnak, 84-en a másodikat és csak 23 hallgató ismerte fel, hogy egyik sem tagadása a másiknak. Oka ennek az a gyakori hiba, hogy nem alkalmazzák még intuitive sem az egyértelmű kommunikáció két elengedhetetlen alapelvét, az ellentmondástalanság és a harmadik kizárásának alapelvét. Megkönnyíti a hiba elkövetését az, hogy ha valami fekete akkor az valóban nem lehet fehér. Ez azonban a tagadásnak csak az egyik oldala. Aki meggondolásaiban nem eléggé alapos és körültekintő, az figyelmen kívül hagyta a másik oldalt: ha valami nem fehér, akkor még egyáltalán nem biztos, hogy fekete.

IV. A negyedik feladatcsoportban azt kívántuk, hogy operatív alkalmazásként fogalmazzák meg adott kijelentések tagadását. Ehhez a legegyszerűbb nyelvi formát használhatták. 9 hallgató tagadta jól az "Egy másodfoku egyenlet megoldható és gyökei különbözőek" kijelentést és 145 hibázta el. Legegyszerűbbnek mutatkozott a "Nincsen rózsa tövis nélkül" tagadása, mert 119-en végezték jól. Ugy gondoljuk, az itt szereplő "nincsen" szó könnyített, noha itt is összetett kijelentés tagadásáról van szó.

V. Három adott "Ha..., akkor..." alaku kijelentés megfordítását vártuk el az ötödik feladatcsoportban. Mindháromnál kb. a hallgatók fele jól végezte a megfordítást, illetve fele elhibázta. Gyakori hiba volt a következő: "Ha

p, akkor q" kijelentés megfordítása az "Akkor q, ha p". Ez arra mutat, hogy a kötőszavak jelentését, tartalmát nem értik a diákjaink, noha éppen ezek a szóban forgó kötőszavak fordulnak elő nagyon gyakran a matematikai bizonyítások, illetve a matematika tanítása során.

- VI. Szerepelt egy olyan közismert állítás is, (a Pythagorasz tétel) amelyre csak nevével utaltunk és kértük a megfordítását. 89 hallgató fogalmazta meg jól és 13 hallgató meg sem próbálkozott a feladattal. Azok hibázták el, illetve nézték tétlenül ezt a részt, akik a középiskolájukban pongyola vagy legalábbis nem "sarkos" fogalmazásban ismerték és tanulták meg ezt a tételt. A pongyola fogalmazás következménye a szóban forgó tétel ilyen felírása: $a^2 + b^2 = c^2$. Ezek után a megfordítás nem meglepő: $c^2 = a^2 + b^2$. A nem "sarkos" fogalmazásra példa: "A derékszögű háromszög átfogójának négyzete egyenlő a két befogó négyzetének összegével". Ebből természetesen legfeljebb egy ilyen megfordítás adódhat: "Ha egy háromszög átfogójának négyzete egyenlő a két befogó négyzetének összegével, akkor a háromszög derékszögű."

Nem vették észre ezt a hallgatók, hogy a felhasznált fogalmak eleve derékszögű háromszöggel kapcsolatosak, hogy egy háromszög legnagyobb oldala azzal válik átfogóvá, illetve a másik két oldal befogóvá, ha közöttük az ismert mennyiségi összefüggés érvényes, vagyis ha a háromszög derékszögű.

VII. A hetedik feladatcsoportban két egyszerű, középiskolai számelméleti ismeretekre épülő implikáció volt:

Ha 3 osztója 9-nek, akkor 3 osztója 81-nek,
illetve:

Ha 3 osztója 10-nek, akkor 3 osztója 100-nak.
Meg kellett állapítani, igazak-e. Az elsőt alig hibázta el valaki. (Mindössze 3 hallgató.) A másodikonál viszont nem ismerték fel ugyanazt a formát, illetve azonosították az implikáció logikai értékét tagjainak logikai értékével. Így 73 hallgató hamisnak találta. Nem értik a "ha..., akkor..." tartalmát.

VIII. A legutolsó feladatcsoport volt a legterjedelmesebb.

Az itt felsorolt feladatokkal azt akartuk vizsgálni, hogy a "következménye", "következik" fogalmat mennyire ismerik a középiskolából kikerült hallgatók. Egyaránt szerepelt szinguláris ill. kategorikus következtetés is. Ennél a kérdéscsoportnál volt a legmagasabb a válaszolni nem tudók száma. Az előzőeknél 8-20 hallgató jelölte meg a "Nem tudom" lehetőséget, itt pedig 20-50. Ez a tény és a többi eredmény jól szemlélteti a jelenlegi középiskolai tanítási gyakorlat már említett hiányosságait. A figyelmet - mind a tanár, mind a diákok - a magyarázó szöveg szakmai problémáira, összefüggéseire, kifejezéseire fordítják és eközben elsiklanak a - mondott vagy írott - szöveg nem szorosan vett matematikai szavain. Ezek a figyelem perifériájára kerülnek, pedig pontos megértésük elengedhetetlen egy-egy tétel megértéséhez.

Általános hiba, hogy a feltett kérdésre válaszolva a tanulók a tartalomból indultak ki, nem pedig a premisszáék és a konklúzió logikai szerkezetéből, kapcsolatából. A következtetések helyességét azonosították a zárótétel igazságával. Nem értik a középiskolából kikerült tanulók a "minden", a "némely", a "van olyan" szavak értelmét, kapcsolatát. Szerpelt pl. két kérdés. Az egyik: "Némely rombusz nem négyszet" kijelentésből következik-e, hogy "Némely négyszet nem rombusz". A második: "Némely rombusz nem téglalap" kijelentésből következik-e, hogy "Némely téglalap nem rombusz". Az első kérdésre a legtöbb hallgató helyes választ adott, tehát tagadták a következménykapcsolatot és csak néhányan hibáztak, ugyanakkor a teljesen hasonló szerkezetű második kérdésnél a hallgatóknak csak kb. fele válaszolt helyesen és sokan az utolsó kijelentést - amelyik igaz kijelentés - a megelőző következményének tartották.

Nem tudták a hallgatóink a formát és a tartalmat szétválasztani. Eleve premisszaként kezelték a premisszáának meg nem adott, közismert matematikai tényt kifejező kijelentést "Mind den négyszet rombusz", a másodiknál pedig a "Van olyan téglalap, ami nem rombusz" kijelentést. Tehát többet használtak fel a következtetések elvégzéséhez, mint amit szabad volt felhasználni. De tükröződik ebben az a gyakran tapasztalható hiba is, hogy ha egy következtetés zárótétele igaz, akkor a következtetést helyesnek tartják, míg ha a zárótétel hamis, akkor a következtetési sémát sem tartják jónak.

A felmérés eredményeinek részletes ismertetését az 1. sz. táblázat tartalmazza. A helyes megoldásokhoz tartozó értékek keretben találhatók.

Alkalmunk volt a felmérésbe bevonni két csoport (szám szerint 16) egyetemi hallgatót. Ezek a hallgatók ugyancsak elsőévesek voltak, tehát hasonló "logikai" mult állt mögöttük, mint a mi hallgatóink mögött. A létszámokban mutatkozó nagy eltérés messzemenő következtetések levonásánál óvatosságra int, de összehasonlítást tehetünk: Szinte valamennyi kérdés-csoportnál a jó, a rossz válaszok és a tartózkodók száma arányos a főiskolásoknál adódott számokkal. Két helyen van szembetűnő eltérés az egyetemi hallgatók javára: A kijelentéspárok közötti "tagadása" reláció felismerésénél és a "ha...., akkor..." alaku kijelentések megfordításánál. Az előbbinél 8 hallgató (50 %) jelölte be úgy a válaszát, hogy a válasz tükrözte a szóban forgó reláció szimmetrikus tulajdonságát. (Az ilyenek száma a mi hallgatóinknál még a 10 %-ot sem érte el.) Az implikáció megfordítását a mieink fele-fele arányban végezték el jól illetve rosszul, az egyetemi hallgatóknál ez az arány 3 : 2 a jó megoldások javára.

Mindezekből azt a következtetést kockáztatjuk meg, hogy a mi hallgatóink sem számottevően gyengébb logikai előképzettségűek, mint az egyetemre jelentkező és kerülő hallgatók.

Az egyetemi hallgatók eredményeit 2. sz. táblázat tartalmazza részletesen.

A logika szisztematikus oktatása utáni felmérés és eredményei

A féléves logika oktatás alatt a hallgatóink megismerkedtek a logika tantervi anyagával, amely anyag összeállításában és feldolgozásában is tükrözi a logika oktatásának mind filozófiai, ismeretelméleti, mind pedig a pedagógiai célját. Az oktatás során a tételes kifejtés keretében különösen ügyelünk azoknak a vonatkozásoknak a kiemelésére, sokoldalú megvilágítására, amelyek hiányára az előbb ismertetett és egy másik, hasonló felmérés mutatott rá. Megkönnyíti a logika ilyen értelmű oktatását az, hogy az itt fellépő fogalmakkal (pl. reláció, művelet), a fogalmak tulajdonságaival más tantárgyban is találkozhatnak a hallgatók, illetve más tárgy (pl. algebra) keretében ismerkednek meg velük általánosságban és a logikában meglévő előfordulásuk csak mint egy interpretáció, mint egy példa szerepel.

A gyakorlatvezetők tapasztalatai adnak némi tájékoztatást arról, hogy milyen eredményesen sajátítják el hallgatóink az előírt anyagot, de ezek többnyire minőségi utalások. A részletesebb és mennyiségi megismerés céljából a szisztematikus logikaoktatás előtti méréshez hasonló vizsgálódást

végeztünk a kurzus lezárása után is. A célunk nyilvánvaló volt: Adatokat szerezni arról, hogy a hallgatóság az eredményes vizsgával igazoltan megtanult logikai ismereteket milyen biztonsággal tudja alkalmazni. Az természetes, hogy a reprodukciós szint vizsgálata ennél a mérésnél nem lehetett feladatunk. Ezt elvégezte a félévi vizsga egyik része. Az összeállításunk témájában hasonló volt az első feladatlaphoz. A feladatcsoportokat úgy állítottuk össze, hogy az általános tartalmi változatosság mellett képet adjanak az elsajátítás különböző szintjeiről. Ebben a mérésben 144 hallgató vett részt.

A feladatlapon hat feladatcsoport szerepelt. (2. sz. melléklet.)

I. Kijelentéspárok egyenértékűségének eldöntésénél számottevő fejlődés tapasztalható. Hét kijelentéspár szerepelt. Egyetlen pár kivételével, az összes többinél ötszöröshatvan százalékos a helyes választ adók számának aránya a hibázók számához viszonyítva. Viszont a hallgatók több mint 70 %-a egyenértékűnek mondta a következő párt: "Ha vasárnap süt a nap, utazunk" - "A vasárnapi utazás szükséges feltétele a napsütés". Engedtek a csábításnak és egy jól hangzó szokványos, köznapi értelemben kézenfekvő kijelentés tartalmát és formáját nézték csak, nem pedig a másik kijelentéssel való kapcsolatát. Azt mutatja ez a példa, hogy nem egyszerű és nem természetes egy-egy kijelentés ekvivalens nyelvi átfogalmazása, különösen

akkor, ha a pszichológiai asszociációk nyilvánvalóak.

II. Nincs ilyen egyértelmű javulás az állítás és tagadása felismerésénél. Igaz, négyszer annyian jelölték be úgy a helyes válaszukat, hogy az visszatükrözte a "tagadása" reláció szimmetrikus tulajdonságát, de alig csökkent azoknak a száma, akik a tagadás megjelölésénél abszolutizáltak a "nem" és a hozzá hasonló szavakat. Pl.

"x osztója y-nak vagy x osztója z-nek"

tagadása hibásan

"x nem osztója y-nak vagy x nem osztója z-nek"

168 hallgatónál.

Ugyanakkor a "Nem esik a hó, de nem süt a nap sem" -

"Esik a hó, pedig süt a nap" párok közül az elsőt jelölték meg a második tagadásaként nyolcvanan, (49 %) ugyancsak hibásan.

Ez a gyenge fejlődés meglepő, mert viszonylag egyszerű (a tagadás az egyetlen érdemi egyváltozós művelet) fogalomról van szó és az alkalmazása sem bonyolultabb. Itt pedig még alkalmazni sem kellett, csak felismerni. Ugy vélem, hogy az egy félév folyamán adódó alkalmak kevés lehetőséget jelentenek felszámolni a régi, hibás sztereotípiákat és újakat, helyeseket kialakítani.

III. Egy feladatcsoportban a hallgatóinknak kellett megfogalmazni (esetleg alkalmas módon átfogalmazni is) megadott kijelentések tagadását. Az értékelés azt mutatja, hogy

még annál a feladatnál is, amelyet legkevesebb hallgató végzett el jól ("Némely könyv izgalmas" tagadása) kb. 60 % az eredményesen elvégzők aránya. Ez pedig - egybevetve az első vizsgálódás adataival-alig vitatható eredmény.

Érdekes és elgondolkoztató összehasonlítani az itt tapasztaltakat a II.-nél látottakkal. Ott - noha csak felismerni kellett az "egymás tagadásai" párokat - a hallgatók többsége hibázott. Ennél a résznél pedig, ahol önálló alkalmazást kívántunk a diákjainktól, a hallgatók többsége nem hibázott. Ez ellentmondásnak tűnik, holott természetes jelenségről van szó. Az előzőt rutinból, megszokásból, az új ismeretek felhasználása, a figyelem különösebb koncentrálása nélkül végezték el, míg az utóbbiaknál kényszerültek a tudatos meggondolásra és ehhez segítségként fel kellett használniuk a félév során tételen megtanult logikai anyagrészeket. Így természetes az, amit az értékelés mutat.

- IV. Kevésbé volt sikeresebb, mint az első alkalommal azoknak a feladatoknak a megoldása, amelyekben kijelentések megfordítását kértük. Igaz, az első felmérésnél mindegyik kijelentés "ha..., ekkor..."formában szerepelt, a másodiknál pedig csak egy volt "Akkor q, ha p" alakú, a többi $p \vee q$ formában adtuk meg. Ezeket tehát, az eredményes megfordítás céljából át kellett írni $p \Rightarrow q$ alakra. De még így is jól végezte el a hallgatóknak 60-62 %-a, szemben

az első mérés 50 %-ával. Ilyen eredménnyel azonban nem lehetünk elégedettek és ezzel a témakörrel gyakorlatokon többet kell foglalkoznunk.

- V. Összetett kijelentések igazságának eldöntése csak a hallgatók 16 %-ánál volt hibás.

Mennyiségileg nem rossz ez az eredmény, mégis nem megnyugtató, mert csak a művelet felismerése és a komponensek logikai értékének eldöntése volt szükséges hozzá. Tehát egyszerű, közvetlen alkalmazást kellett elvégezni. Így sok a 15 % hibás megoldás.

- VI. A legutolsó feladatcsoport egyszerűbb (helyes illetve nem helyes) következtetésekből állt. A kérdést úgy tettük fel, hogy "Következik e a premisszákból (és csak azokból), hogy:"... Az öt feladat közül négyet a hallgatók legalább 75 %-a jól oldott meg. Egyet azonban alig több mint 20 % válaszolt meg helyesen. Ez így hangzott:

Ha egy háromszög két szöge egyenlő, akkor a háromszög egyenlőszáru.

A háromszög egyenlőszáru

A háromszög két szöge egyenlő

Sajnos csak 31 hallgatónk ítélte meg úgy, hogy a zárótétel nem következménye a feltételeknek.

A nehézség abból fakadt, hogy a hallgatóink közül sokan az absztrakciót nem végezték el, nem vonatkoztatták el

a formát a tartalomtól és a többség nem tudta, vagy meg sem próbálta geometriai ismereteitől függetlenül vizsgálni a kérdést. Itt is erősebbnek bizonyult a megszőkás, a már számos alkalommal hibásan végigjárt gondolatmenet, mint az új ismeretek tudatos felhasználásának lehetősége. Kevesen vették észre, hogy a

$$p \Rightarrow q$$

$$\frac{q}{p}$$

séma szóban forgó interpretációja esetén, a premisszák, igazsága mellett mindig igaz ugyan a konklúzió is, de a séma ettől függetlenül nem helyes következtetési séma.

A mérés eredményének részletes ismertetését a 3. sz. táblázat tartalmazza.

Mindent egybevetve: A matematika szakos hallgatóink számára történő matematikai logikai oktatás szükséges is, hasznos is. Nem szabad azonban a logika vizsgával befejeződnie. A jelenlegi oktatás és még egy bővebb is igényli azt, hogy a logikai műveletek, struktúrák, fogalmak, eljárások kerüljenek elő nap-nap után a többi matematikai tárgy oktatásában is, mert a logika tanítása és tanulása nem öncélú: Nemcsak az a fontos, hogy egy végzős hallgatónk mennyit tud tétélesen a logika tantervi anyagából, hanem az is, mennyire tudja azokat az ismereteket alkalmazni, a mindennapos tanári munkájában felhasználni. Az, ami ma esetleg csak egy vizsgajegy

formájában tükröződik, évek múlva egy tanár jellemző személyiségjegye és mint ilyen, a felnövekvő korosztályok értelmi alakításának jelentős befolyásolója lehet.

1. sz. melléklet (1)

Név:

Szak, csoport:

I. Ugyanazt jelentik-e (ekvivalensek-e) az alábbi kijelentéspárok? / a és b valós számok /

			Igen	Nem	Nem tudom
1a.	a kisebb vagy egyenlő mint b; jelöléssel: $a \leq b$	1b. a kisebb b-nél			
2a.	$a \leq b$	2b. a legalább b			
3a.	$a \leq b$	3b. a nem nagyobb b-nél			
4a.	$a \leq b$	4b. b legalább a			
5a.	$a \leq b$	5 b. a legfeljebb b			
6a.	$a \leq b$	6b. Van olyan x nem negatív valós szám, hogy $a + x = b$			
7a.	$a \leq b$	7b. Van olyan x pozitív szám, hogy $a + x = b$			

1. sz. melléklet (2)

II. Ugyanezt jelentik-e az alábbi fogalompárok?

			Igen	Nem	Nem tudom
1.	négyzet	egyenlő oldalú téglalap			
2.	négyzet	derékszögű rombusz			
3.	négyzet	egyenlő oldalú deltoid			
4.	négyzet	ferdeszögű négyzet			
5.	paralelogramma	egyenlő szárú trapéz			

III. Melyik állítás tagadása a másiknak?

		1 a 2-nek	2 a 1-nek	Egyik sem	Nem tudom
1 Az A pont az a egyenesen van	2 Az A pont nincs az a egyenesen				
1 Bármely három a, b, c számra teljesül: $a/(b+c) = ab+ac$	2 Egyetlen a számra nem teljesül, hogy $a/(b+c) = ab+ac$				
1 Van olyan szög, amelynek tangense zérus	2 Nem minden szög tangense különbözik zérustól				
1 Minden kutya fekete	2 Van olyan kutya, amelyik fehér				
11 Az x szám osztója y-nak és az x szám osztója z-nek	2 Nem igaz, hogy az x szám osztója y-nak és az x szám osztója z-nek				

1. sz. melléklet (3)

IV. Irjuk le a következő kijelentések tagadását !

1a. Egy másodfoku egyenlet megoldható és gyökei különbözők

1b.

2a. Nem jött a vonattal és nem irt levelet sem.

2b.

3a. Minden zsák megtalálja a maga foltját.

3b.

4a. Nincsen rózsza tövis nélkül.

4b.

V. Irjuk le a következő kijelentések megfordítását !

1a. Ha egy egész szám utolsó jegye 0 vagy 5, akkor osztható 5-tel.

1b.

2a. Ha a 4 páros szám, akkor az oroszlánt tolláért vadásszák.

2b.

3a. Akkor tanulom meg a leckét, ha esik az eső.

3b.

VI. Irjuk le a Pitagorasz-tétel megfordítását !

1. sz. melléklet (4)

VII. Igazak-e a következő kijelentések ?

		Igen	Nem	Nem tudom
1.	Ha 9 osztható 3-mal, akkor 81 osztható 3-mal.			
2.	Ha 10 osztható 3-mal, akkor 100 osztható 3-mal.			

VIII.

Ismeretes, hogy	Következik-e ebből az, hogy	Igen	Nem	Nem tudom
1. a. Ha egy szám nullára végződik, akkor osztható 5-tel; b. Az adott szám nullára végződik.	Az adott szám osztható 5-tel?			
2. a. Ha egy szám nullára végződik, akkor osztható 5-tel; b. Az adott szám osztható 5-tel.	Az adott szám nullára végződik?			
3. a. Ha $x = 2$, akkor $x^2 = 4$; b. $x \neq 2$.	$x^2 \neq 4$?			

1. sz. melléklet (5)

			Igen	Nem	Nem tudom
4	a. Ha $x = 2$, akkor $x^2 = 4$; b. $x^2 \neq 4$.	$x \neq 2$?			
5	a. Minden egész szám racionális szám; b. Minden törtszám racionális szám.	Minden tört e- gész szám ?			
6	a. Ha $x = 0$ vagy $y = 0$, akkor $xy = 0$;	a/ $x \neq 0$ vagy $y \neq 0$			
	b. $xy \neq 0$.	b/ $x \neq 0$ és			
7.	Némely rombusz nem négyzet	Némely négyzet nem rombusz ?			
8	Némely rombusz nem téglalap	Némely téglalap nem rombusz			

2. sz. melléklet (1)

Név:

Szak, csoport:

I. Egyenértékűek-e a következő
kijelentéspárok ?

				Igen	Nem	Nem tudom
1.a.	Péter tanul és zenét hallgat.	1.b.	Péter zenét hallgat, pe- dig tanul.			
2.a.	Ha vasárnap süt a nap, utazunk.	2.b.	A vasárnapi utazás szük- séges felté- tele a nap- sütés			
3.a.	Ha ma nem kapok levelet, távira- tot adok fel.	3.b.	Ma vagy leve- let kapok, vagy távira- tot adok fel.			
4.a.	Ha $3/9$, akkor $3/81$.	4.b.	Nem igaz az, hogy $3/9 \wedge 3/81$.			
5.a.	Nem minden dolog arany, ami fény- lik.	5.b.	Van olyan do- log, ami nem arany és fénylik			
6.a.	Van olyan négyzet, ami nem trapéz.	6.b.	Nem minden négyzet trapéz			

2. sz. melléklet (2)

II. Melyik állítás tagadása a másiknak?

		1 a 2-nek	2 az 1-nek	Egyik sem	Nem tudom
1. A sík bármely két egyenese metszi egymást.	2. A síkban van- nak olyan e- gyenespárok, amelyek nem metszik egy- mást.				
1. A tartály gömb alakú.	2. A tartály koc- ka alakú.				
1. $x < 10$	2. $x = 25$				
1. Az x egész szám osztója y -nak vagy z -nek.	2. Az x szám nem osztója y -nak vagy z -nek.				
1. Nem esik a hó; de nem süt a nap sem.	2. Esik a hó; pedig süt a nap.				

III. Írjuk le a következő kijelentések tagadását /alkalmas módon átfogalmazva/ !

1a. Ha hétkor kelek fel, elkésem a munkából.

1b.

2a. Néha gyalog megyek.

2b.

3a. A moziban meleg van és a film is unalmas.

3b.

4a. Némely könyv izgalmas.

4b.

2. sz. melléklet (3)

IV. Irjuk le a következő kijelentések megfordítását !

1a. Nem megyek moziba, ha esik az eső.

1b.

2a. Egy egész szám nem osztható 10-zel, vagy utolsó jegye páros.

2b.

3a. Egy egész szám nem páros vagy osztható 2-vel.

3b.

V. Igazak-e a következő kijelentések ?

		Igen	Nem	Nem tudom
1.	Nem igaz, hogy $x=2$ és $x^2 \neq 4$.			
2.	Bulgária fővárosa nem Varsó, vagy a galambok sasokra vadásznak.			

2. sz. melléklet (4)

VI.

Ismeretes, hogy		Következik-e az a és b kijelentések- ből /és csak ezek- ből/ hogy	Igen	Nem	Nem tudom
1a.	ha egy háromszög két szöge egyenlő, akkor a háromszög egyenlőszárú;	a háromszög két szöge egyenlő ?			
b.	a háromszög egyenlőszárú.				
2a.	ha vonaton utazom és olvasok, megfájdul a fejem;	megfájdul a fejem?			
b.	vonaton utazom.				
3a.	ha egy szám páros és jegyeinek összege osztható 3-mal, akkor a szám osztható 6-tal;	a szám osztható 6-tal ?			
b.	a szám páros, vagy jegyei összege osztható 3-mal.				
4a.	ha $\alpha = 30^\circ$, akkor $\sin \alpha = \frac{1}{2}$;	$\alpha = 30^\circ$?			
b.	$\sin \alpha \neq \frac{1}{2}$.				
5a.	ha $x = -2$, akkor $x^4 = 16$;	$x = -2$?			
b.	$x^4 = 16$.				

1. sz. táblázat(1)

I.

	Igen		Nem		Nem tudom	
1	37	22,7 %	124	76,1 %	2	1,2 %
2	29	17,8 %	134	82,2 %	0	0 %
3	155	95,1 %	6	3,7 %	2	1,2 %
4	107	65,6 %	54	33,1 %	2	1,2 %
5	140	85,9 %	18	11 %	5	3,1 %
6	74	45,4 %	70	42,9 %	19	11,6 %
7	78	47,8 %	67	41,1 %	18	11 %

II.

	Igen		Nem		Nem tudom	
1	156	95,7 %	6	3,7 %	1	0,6 %
2	135	82,8 %	17	10,7 %	1	0,6 %
3	38	23,3 %	117	71,8 %	8	4,9 %
4	113	69,3 %	35	21,5 %	15	9,2 %
5	38	23,3 %	120	73,6 %	5	3,1 %

III.

	1 a 2-nek		2 az 1-nek		Egyik sem		Nem tudom	
1	30	18,4 %	130	79,7 %	8	4,9 %	2	1,2 %
2	33	20,2 %	86	52,7 %	30	18,4 %	14	8,6 %
3	13	7,9 %	13	7,9 %	127	77,9 %	10	6,1 %
4	60	36,8 %	84	51,5 %	23	14,1 %	2	1,2 %
5	19	11,6 %	135	82,8 %	9	5,5 %	5	3,1 %

1. sz. táblázat (2)

IV.

	Helyes		Hibás		Nem válaszolt	
1	9	5,5 %	145	88,9 %	9	5,5 %
2	9	5,5 %	147	90,2 %	7	4,3 %
3	96	58,8 %	56	34,3 %	9	5,5 %
4	119	73 %	33	20,2 %	11	6,7 %

V.

1	70	42,9 %	94	57,7 %	2	1,2 %
2	93	57 %	51	31,3 %	18	11 %
3	46	28,2 %	113	69,3 %	4	2,4 %

VI.

	89	54,6 %	60	36,8	13	8 %
--	----	--------	----	------	----	-----

VII.

	Igen		Nem		Nem tudom	
1	160	98,1 %	3	1,8 %	0	0
2	81	49,7 %	73	44,8 %	7	4,3 %

VIII.

1	134	82,2 %	7	4,3 %	22	13,5 %
2	42	25,7 %	88	54 %	33	20,2 %
3	49	30,1 %	72	44,2 %	42	25,7 %
4	83	50,9 %	34	20,8 %	46	28,2 %
5	6	3,7 %	129	79,1 %	28	17,2 %
6/a	57	34,9 %	73	44,9 %	33	20,2 %
6/b	100	61,3 %	31	19 %	32	19,6 %
7	50	30,6 %	85	52,1 %	28	17,2 %
8	48	29,4 %	77	47,2 %	38	23,3 %

2. sz. táblázat (1)

I.

	Igen		Nem		Nem tudom	
1	0	0	15	93,7 %	1	6,3 %
2	0	0	16	100 %	0	0
3	16	100 %	0	0	0	0
4	12	75 %	3	18,7 %	1	6,3 %
5	16	100 %	0	0	0	0
6	13	81,2 %	3	18,7 %	0	0
7	5	31,3 %	10	62,5 %	1	6,3 %

II.

1	15	93,7 %	0	0	1	6,3 %
2	14	87,5 %	1	6,3 %	1	6,3 %
3	3	18,7 %	12	75 %	1	6,3 %
4	14	87,5 %	2	12,5 %	0	0
5	2	12,5 %	14	87,5 %	0	0

III.

	1 a 2-nek		2 az 1-nek		Egyik sem		Nem tudom	
1	11	68,7 %	13	81,2 %	0	0	0	0
2	6	37,5 %	10	62,5 %	5	31,5 %	0	0
3	1	6,3 %	1	6,3 %	14	87,5 %	0	0
4	8	50 %	10	62,5 %	1	6,3 %	0	0
5	5	31,3 %	13	81,2 %	0	0	1	6,3 %

IV.

	Helyes		Hibás		Nem válaszolt	
1	0	0	16	100	0	0
2	1	6,3 %	15	93,7 %	0	0
3	10	62,5 %	6	37,5 %	0	0
4	11	68,7 %	5	31,3 %	0	0

2. sz. táblázat(2)

V.

	Helyes		Hibás		Nem válaszolt	
1	10	62,5 %	6	37,5 %	0	0
2	12	75 %	4	25 %	0	0
3	6	37,5 %	10	62,5 %	0	0

VI.

	12	75 %	3	18,7 %	1	6,2 %
--	----	------	---	--------	---	-------

VII.

	Igen		Nem		Nem tudom	
1	16	100 %	0		0	0
2	11	68,7 %	5	32,2 %	0	0

VIII.

	Igen		Nem		Nem tudom	
1	14	87,5 %	0	0	2	12,5 %
2	2	12,5 %	7	43,2 %	6	37,5 %
3	2	12,5 %	9	56,9 %	6	37,5 %
4	8	50 %	2	12,5 %	6	37,5 %
5	0	0	12	75 %	4	25 %
6.a	3	18,7 %	12	75 %	1	6,2 %
6.b	10	62,5 %	5	31,2 %	1	6,2 %
7	6	37,5 %	10	62,5 %	0	0
8	5	31,2 %	10	62,5 %	1	6,2 %

3. sz. táblázat(1)

I.

	Igen		Nem		Nem tudom	
1	93	65 %	48	33 %	3	2 %
2	107	74,3 %	37	25,7 %	0	0
3	106	73,6 %	37	25,7 %	1	0,7 %
4	94	65,3 %	48	33,3 %	2	1,5 %
5	129	89,6 %	14	9,7 %	1	0,7 %
6	133	92,4 %	8	5,6 %	3	2 %

II.

	1 a 2-nek		2 az 1-nek		egyik sem		Nem tudom	
1	44	30,6 %	108	75 %	18	12,5 %	0	
2	15	10,4 %	22	15,3 %	120	83,3 %	2	1,5 %
3	32	22,2 %	40	27,7 %	79	55 %	5	4 %
4	15	10,4 %	108	75 %	25	17,4 %	4	3 %
5	80	55,6 %	24	16,7 %	41	28,4 %	7	5 %

III.

	Helyes		Hibás		Nem válaszolt	
1	109	75,7 %	33	22,9 %	2	1,5 %
2	97	67,4 %	45	31,3 %	2	1,5 %
3	102	70,8 %	41	28,5 %	1	0,7 %
4	88	61,1 %	55	38,2 %	1	0,7 %

IV.

	Helyes		Hibás		Nem válaszolt	
1	91	63,2 %	50	34,7 %	3	2 %
2	68	47,2 %	65	45,1 %	11	7,6 %
3	75	52,1 %	56	38,9 %	13	9 %

3. sz. táblázat(2)

V.

	Igen		Nem		Nem tudom	
1	124	86 %	24	16,7 %	0	0
2	112	77,8 %	23	16 %	9	6,3 %

VI.

	Igen		Nem		Nem tudom	
1	120	83,3 %	21	14,6 %	3	2 %
2	21	14,6 %	121	84 %	2	1,5 %
3	33	23 %	100	69,4 %	11	7,6 %
4	5	3,5 %	133	92,4 %	6	4,1 %
5	35	24,3 %	104	72,2 %	4	2,8 %

Irodalomjegyzék

1. Ágoston-Nagy-Orosz: Mérések módszerek a pedagógiában,
Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.
2. Balázs, B. A középiskolai logikaoktatás néhány kérdése,
Pedagógiai Szemle, 1957/4.
3. Balázs, B. A középiskolai logikaoktatás tanterve,
Pedagógiai Szemle, 1959/4.
4. Dr. Baló, J. Logika, Tankönyv a Tanárképző Főiskolák
részére
Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
5. Berky, I. A logikaoktatás szervezeti és tantervi kér-
dései,
Pedagógiai Szemle 1958/6.
6. Coombs, P.H. Az oktatás világválsága,
Tankönyvkiadó, 1971.
7. Csoma, Gy. A logika oktatásának áttekintése és a logi-
kai képzés megoldatlan problémái az általános
gimnáziumban,
Filozófiai Szemle, 1963/4.
8. Fenyő, I. A matematika helye a tudományok rendszerében,
Filozófiai Szemle 1962/5.
9. Gathmann, G. Logikai képzés az alsó és középső fokon,
Praxis der Mathematik, 1963.
10. G. Havas, K. Logika, Egyetemi egységes jegyzet,
Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

11. G. Havas, K. A logika oktatás helye és aktuális tartalmi kérdései a tanárképzésben,
Filozófiai Szemle, 1970/11.
12. G. Havas, K. Az ítéletek közötti viszonyok vizsgálata matematikai logikai módszerekkel,
Filozófiai Szemle, 1969/1.
13. Inhelder, B.-Piaget, J. A gyermek logikájától az ifju logikájáig,
Akadémiai Kiadó, 1967.
14. Joja, A. Logikai tanulmányok II. köt.
Filozófiai Szemle, 1968/3.
15. Dr. Katona, P. A logika oktatásának célja a nem filozófia szakos tanárképzős hallgatók körében,
Filozófiai Szemle, 1962/6.
16. Kozlova, M. Nyelv és filozófia,
Kossuth Könyvkiadó, 1976.
17. Krygowska, A.Z. A logika elemei a középiskolai matematikatanításban,
Bulletin de l' Association ... 1966, N^o 251.
18. Quine, W.V.O. A logika módszerei,
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.
19. Ruzsa, I. A matematikai logika materialista felfogásáról,
Filozófiai Szemle 1968/6.

20. Ruzsa, I. Szimbolikus logikai kutatások a Szovjet-
unióban,
Filozófiai Szemle, 1972/2; 1973/3-4.
21. Ruzsa, I. Szimbolikus logika I-II. /Bölcsészettudo-
mányi Kar jegyzete,
Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
22. Ruzsa, I.-Urbán, J. Matematikai logika,
Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
23. Skemp, R.R. A matematikatanulás pszichológiája,
Gondolat, Budapest, 1975.
24. Szendrei-Tóth: Logika a matematika szakos hallgatók
részére,
Főiskolai jegyzet,
Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.
25. Sztoljár, A.A. A matematikatanítás módszerei,
Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.
26. Sztoljár, A.A. A matematikatanítás logikai problémái,
Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
27. Sztoljár, A.A.-Vejcman, I.B. A matematikai logika ele-
mei az iskolában,
Szovjetszkaja Pedagogika, 1965/7.
28. Tamás, Gy. A logika gimnáziumi oktatásáról,
Pedagógiai Szemle, 1958/2.

29. Turnau, S. A matematikai logika elemei az iskolában,
Matematyka, 1965/3.
30. Vág, O. Filozófiaoktatás a középiskolában,
Pedagógiai Szemle, 1958/6.
31. Vajda, M. Dialektika és logika,
Filozófiai Szemle, 1964/3.
32. Walsh, W. A matematika szemantikai és szintaktikai
szempontjai,
Mathematik in der Schule, 1967/8.
33. M. Zsigmond, A. A logikai alaptörvények dialektikus
és formális logikai értelmezéséről,
Filozófiai Szemle, 1962/2.